Теорема Виета и ее применение

Вы прочитали название урока-лекции. Можете ли сказать, что будет на данных уроках?

Отправимся во Францию в далекий1594 год. Идут двое:

Высокий стройный – король Франции, второй – посланник Голландии. Посланник много рассказывает о своей стране.

— В Голландии сейчас много талантливых инженеров и ученых,— говорил посланник.— Математик и механик Симон Стевин разрабатывает новые системы шлюзов и плотин, по проектам математика Лудольфа Цейлена возводятся крепости, математик Андриен Ван Роумен славится своими головоломными вычислениями. Кстати,— продолжал посланник,— не так давно Ван Роумен сделал вызов математикам всего мира. Он разослал во многие страны письмо, в котором предлагает решить придуманную им задачу. Но пока это никому не удалось.

— Победителем непременно будет француз,— засмеялся король.

по-видимому, Франция не имеет выдающихся математиков, поскольку Ван Роумен среди тех, кому он адресовал свой вызов, не упомянул ни одного француза.

— И все же у меня есть математик, и весьма выдающийся,— ответил Генрих.— Позовите Виета.

Так в этот осенний день столкнулись судьбы двух очень непохожих людей.

На следующий день посланник предложил задачу Роумена Виету. В письме предлагалось решить уравнение:

$$45x-3795x^{3}+95\,634x^{5}-1138\,500x^{7}+7\,811\,375x^{9}-34\,512\,075x^{11}+105\,306\,075x^{13}-232\,676\,280x^{5}+384\,942\,375x^{17}-488\,494\,125x^{19}+483\,841\,800x^{21}-378\,658\,800x^{23}+236\,030\,652x^{25}-117\,679\,100x^{27}+46\,955\,700x^{29}-14\,945\,040x^{31}+3\,764\,565\,x^{33}-740\,259x^{35}+111\,150x^{37}-12\,300x^{39}+945x^{41}-45x^{43}+x^{45}=a,$$

В котором а было таким числом:

$$a=\sqrt{1\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}-\sqrt{1\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}}.$$

Виет блестяще решил задачу, указав не только решение, которое было известно автору, но и указал еще 22 решения, которые были неизвестны автору.

Сегодня нам предстоит:

- открыть теорему, носящую имя Виета,

- доказать теорему Виета,

- профессионально поработать с теоремой Виета.

Для открытия теоремы будем действовать, как действует экспериментатор, выполняя экспериментальное исследование. Напомним, как действует экспериментатор:

– готовится специальная установка для проведения экспериментов,

– определяются объекты, за которыми будут вестись наблюдения, данные, которые будут собираться и алгоритмы обработки данных,

– проводятся эксперименты, в которых соблюдаются определенные условия, происходит фиксирование определенных показателей,

– собираются данные о результатах экспериментов.

Далее изучаются данные, формулируется гипотеза, планируются дополнительные эксперименты по проверке гипотезы. Если новые эксперименты подтверждают гипотезы, то экспериментатор пытается доказать гипотезу теоретически. Но часто получается так, что ему это не удается сделать, хотя нет данных о том, что предположение не выполняется. В таком случае признается наличие проблемы. Это признание реализуется в виде формулировки задачи или нескольких заданий. Если задача актуальна и представляет интерес, то за ее решение могут приняться другие исследователи. В физике и математике известны случаи, когда предположение не было доказано на протяжении большого числа лет.

В нашем будем использовать экспериментальную установку в виде специальной таблицы.

№	Уравнение $x^2+px+q=0$	P	q	x_1	x_2
1	$x^2+3x–4=0$				
2	$x^2+5x+6=0$				
3	$x^2-5x+6=0$				
4	$x^2–x–12=0$				

Ученикам предлагается решить уравнения заполнить таблицу. После заполнения школьники получают такую таблицу.

№	Уравнение $x^2+px+q=0$	P	q	x_1	x_2
1	$x^2+3x–4=0$	3	–4	1	–4
2	$x^2+5x+6=0$	5	6	–2	–3
3	$x^2–5x+6=0$	–5	6	2	3
4	$x^2–x–12=0$	–1	–12	–3	4

Теперь школьникам нужно сравнить корни уравнений и их коэффициенты и попытаться высказать предположения о связи корней и коэффициентов уравнений. Предлагается провести индивидуальные наблюдения, потом объединиться в пары и обсудить результаты.

Если высказать предположение не удается, то могут быть выполнены дополнительные эксперименты. Следует помнить, что при проведении экспериментального исследования требуется проявить терпение, настойчивость, аккуратность.

После нескольких попыток удастся заметить известные равенства:

$$p=–(x_1+x_2),\ q=x_1\cdot x_2.$$

Естественен вопрос: что делать дальше?

Экспериментатор знает: следует проявить дополнительные эксперименты в жестких условиях. Для этого следует выявить то общее, что было в данных предыдущих экспериментов и изменить условие. Анализ показывает, что во всех уравнениях было два корня и они были целыми числами. Теперь обратимся к такому уравнению

Рассмотрим уравнение $x^2+4x+4=0$. Решив его, находим, что оно имеет единственный корень $x=-2$.

Столкнулись с ситуацией, в которой не удается проверить наше предположение: уравнение имеет единственный корень. Гипотеза не подтвердилась? Как поступить в этом случае? Можно прекратить работу по доказательству предположения и поиску связей. Вполне возможно, это будет (в некоторых случаях) верным решением. Но возможно, имеет смысл попытаться уточнить или изменить предположение.

В данном случае примем такое соглашение: если дискриминант квадратного уравнения равен 0, то будем считать, что уравнение имеет два равных корня: $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$. Проверим выполнение предположения для уравнений, дискриминант которых равен 0.

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p \quad \Rightarrow \quad -p = -(x_1 + x_2)$$

$$x_1 \cdot x_2 = (-\frac{p}{2}) \cdot (-\frac{p}{2}) = \frac{p^2}{4} = q$$

Напомним, что проверку проводим при условии, что дискриминант уравнения равен 0. Убедились, что после принятия соглашения предположение выполняется.

Предпримем еще одну попытку проверить – рассмотрим квадратное уравнение, корни которого не являются целыми. Для этого обратимся к уравнению: $x^2+2x-1=0$. Убедитесь самостоятельно, что корнями уравнения являются числа: $-1-\sqrt{2} \quad и \quad -1+\sqrt{2}$.

Убедитесь самостоятельно в том, что сумма корней равна -2, а их произведение равно -1.

Это значит, что наша гипотеза подтвердилась.

Задание: Проверьте справедливость нашей гипотезы для следующих уравнений:

а) $x^2+q=0$; б) $x^2+px=0$; в) $x^2=0$.

Так как во всех случаях гипотеза подтвердилась, то имеет смысл попытаться ее доказать (реально искать доказательство может не экспериментатор, а другой исследователь. К примеру, в физике имеются физики - теоретики).

Это означает, что мы пробуем доказать такую теорему: ***Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.***

Мы уже знаем, что это утверждение справедливо при Д=0. Пусть Д>0. Попытаемся найти доказательство теоремы. Прежде всего, следует разобраться с тем, что дано в условии теоремы и что требуется доказать:

Дано. Квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, которое имеет разные корни x_1, x_2.

Требуется доказать равенства: $\mathbf{p=-(x_1+x_2),\ q=x_1 \cdot x_2}$.

Доказательство можно проводить разными способами. Приведем вариант доказательства путем получения следствий из условия.

Напомним некоторые методы получения следствий (которые «работают» не только в математике). Следствие можно получить, если:

- заменить объекты, фигурирующие в теореме, их определениями;
- применить известное утверждение;
- высказать предположение, которое после применения будет проверено,
- предположить противное,
- выполнить допустимые действия с объектами в ситуации теоремы.

Так как требуется получить равенства, в которых фигурируют корни квадратного уравнения и его коэффициенты, то следует попытаться получить такие следствия, в результате которых получаются равенства с такими же объектами. В нашем случае фигурируют корни квадратного уравнения $x^2px+q=0$. Согласно определению корней это означает: истинны следующие равенства:

$$x_1^2+px_1+q=0,\ x_2^2+px_2+q=0.$$

Ясно, что это не те равенства, которые требуется доказать. В такой ситуации имеет смысл:

- изучить новые равенства;
- определить сходство и различия с равенствами, которые следует доказать;
- постараться определить способы уменьшения различий.

В результате выясним, в каком направлении следует пытаться получить новые следствия и то, какой из известных методов получения следствий можно применить.

Сравнение полученных равенств с теми, которые следует доказать, показывает: **основное отличие заключается в том, что корни и коэффициенты входят в равенства разным способом.**

В новых равенствах корни отделены друг от друга, а коэффициенты входят в оба равенства. В те же равенства, которые требуется доказать корни входят в оба равенства одновременно, а коэффициенты только в одном из равенств. Отсюда получаем: **желательно получить такие следствия, в результате которых коэффициенты отделяться друг от друга.**

Это можно сделать, получая следствия, выполнив допустимые действия с объектами, которые имеются. В данном случае рассмотрим разность равенств. После очевидных преобразований получаем:

$$(x_2-x_1)(x_1+x_2+p)=0.$$

Теперь, обращаясь к новому методу получения следствия – применяя известные утверждения (Какие?), приходим к выводу: $x_1+x_2+p=0$ или $x_1+x_2=-p$. Первое из равенств доказано.

Для завершения доказательства подставим $p=-(x_1+x_2)$ в первое равенство. Последовательно получаем:

$$x_1^2+px_1+q=0$$

$$x_1^2-(x_1+x_2)x_1+q=0$$
$$x_1^2-x_1^2-x_1x_2+q=0$$
$$x_1x_2=q.$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема названа теоремой Виета по имени известного французского математика Франсуа Виета (1540-1603 гг.). Прежде чем продолжить работу с теоремой, приведем несколько примеров ее применения.

Пример 1. Найти сумму и произведение корней уравнения $x^2+7x-8=0$.

Это приведенное квадратное уравнение, которое имеет корни (Почему?). Применив теорему Виета, находим: сумма корней равна -7, а произведение равно -8.

Пример 2. Ученик, решая уравнение $x^2+3x-4=0$, получил корни $x_1=1$, $x_2=4$. Докажите, что ученик допустил ошибку.

Найдем сумму корней, которые получены учеником: 1+4=5. Из теоремы же Виета следует, что эта сумма равна -3.

Ученик ошибся.

Теперь следует продолжить работу над новой теоремой. Что имеется в виду? Профессиональный математик знает ответ на этот вопрос. Следует попытаться:

- сформулировать и проверить истинность обратного утверждения;
- обобщить теорему;
- найти новые интересные применения теоремы.

Обратную теорему можно сформулировать так: **Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1+x_2=-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.**

Доказательство. По условию $p=-(x_1+x_2)$, $q=x_1x_2$.

Следовательно, уравнение $x^2+px+q=0$ можно записать в виде

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

Теперь преобразуем левую часть уравнения:

$$x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2=0.$$
$$x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=0$$
$$(x-x_1)(x-x_2)=0.$$

Видно, что уравнение имеет корни x_1 и x_2. Значит и исходное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет тоже корни x_1 и x_2.

Обратная теорема Виета доказана.

Для выполнения обобщения математик знает приемы обобщений. Один из таких **общих методов обобщения – замена объектов, которые фигурируют в ситуации.** Такое обобщение выполняется по такой схеме:

1. Выявляются объекты, которые фигурируют в ситуации теоремы (задачи).
2. Определяются возможные замены объектов.
3. Выполняется замена объектов.
4. Формулируется возможное обобщение.

5. Доказывается утверждение, сформулированное на предыдущим шаге.

Если доказать удается, то такое утверждение и является обобщением. Реализуем эту схему.

1. **Выделяют в уравнении $x^2+px+q=0$ многочлен x^2+px+q.**

В нем такие объекты:

– число 1– коэффициент при x^2;

– число 0 – правая часть уравнения;

- коэффициенты p и q;

– число 2 – показатель степени.

2. **Теперь для каждого из объектов определяют возможные замены**.

Заменяя старший коэффициент 1 на произвольное число, приходим к теореме Виета для общего квадратного уравнения: $ax^2+bx+c=0$.

Если спросить школьников: Как доказать аналог теоремы Виета для общего уравнения, то ученики чаще всего предлагают выполнить эксперименты, анализ результатов экспериментов и т. д. Такие действия позволяют сформулировать и доказать обобщение теоремы Виета. Но в данном случае может такое соображение: **если Вам известно утверждение, из которого получено обобщение путем замены объектов, то при поиске формулировки и доказательстве имеет смысл попытаться новую ситуацию свести к исходной.**

Реализуя это эвристическое соображение требуется общее квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, имеющее корни x_1 и x_2 заменить приведенным уравнением $x^2+px+q=0$, которое равносильного исходному уравнению. Зная различия между уравнениями $ax^2+bx+c=0$ и $x^2+px+q=0$, легко определяем нужное действие – разделим обе части уравнения $ax^2+bx+c=0$ на а. Получим приведенное квадратное уравнение равносильное исходному: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, корни x_1 и x_2. Применяя к этому уравнению теорему Виета, получаем равенства: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

Эти равенство выражают теорему Виета для уравнения $ax^2+bx+c=0$, которое имеет корни x_1 и x_2. Сформулируйте и докажите истинность обратного утверждения для общего уравнения самостоятельно.

2. Теперь перейдем к замене 0 в правой части уравнения. Вместо 0 рассмотрим любое число r. В этом случае предположим, что существуют два значения x – S_1 и S_2 такие, что $S_1^2+pS_1+q=r \quad и \quad S_2^2+pS_2+q=r$. Изучив эти равенства, приходим к выводу, что S_1 и S_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q-r=0$. Применив к этому уравнению теорему Виета, получаем:

$$S_1+S_2=-p$$
$$S_1\cdot S_2=q-r$$

Предлагаем самостоятельно доказать такое обобщение теоремы Виета: **Если S_1, S_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=d$, то верны следующие**

равенства:

$$S_1 + S_2 = -\frac{b}{a}, \quad S_1 \cdot S_2 = \frac{c-d}{a}.$$

3. Обратимся к замене показателя степени 2. Прежде всего естественно обратиться к уравнению третьей степени:

$$x^3+px^2+qx+r=0.$$

Вероятно, такие уравнения имеют три корня. Но как связаны эти корни с коэффициентами p, q, r, мы не знаем. Применить экспериментальный подход не удастся: формулы корней уравнений третьей степени не изучаются в школе.

Как же можно поступить в такой ситуации? Можно поступить «наоборот». Составить уравнение по корням, а потом высказать прогноз о связях между корнями уравнения и коэффициентами.

Для реализации этой идеи. Вспомним, что приведенное квадратное уравнение по корням x_1 и x_2 можно было получить так:

1. Записываем уравнение: $(x-x_1)(x-x_2)=0$.
2. Выполняем допустимые преобразования уравнения, получаем уравнение: $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.

Отсюда ясно, что если многочлен имеет вид $x^2+px+q=0$, то $p=-(x_1+x_2)$, $q=x_1x_2$. Теперь понятно, каким образом по корням уравнения составить уравнение и высказать прогноз о равенствах в теореме Виета для многочлена третьей степени.

Пусть взяли числа x_1, x_2, x_3. Уравнение третьей степени, для которого числа x_1, x_2, x_3 являются корнями можно записать так: $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$.

Раскрыв скоби и выполнив приведение подобных, получим уравнение:

$$x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3=0.$$

Теперь, если предположить, что исходное уравнение третьей степени имеет вид $x^3+px^2+qx+r=0$, то должно выполняться равенство:

$$x^3+px^2+qx+r= x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3.$$

Это и позволяет сформулировать предположение о справедливости такого варианта теоремы Виета для многочлена третьей степени: **Если x_1, x_2, x_3** – корни уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$, то выполняются равенства

$$p=-(x_1+x_2+x_3),\ q= x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1,\ r=-x_1x_2x_3.$$

Предлагается самостоятельно доказать это утверждение.

Следующие примеры знакомят с возможными применениями теоремы Виета.

Пример 3. Определите знаки корней уравнения $x^2+2x-1=0$ (из предыдущего известно, что это уравнение имеет корни).

Применив теорему Виета, получаем такие равенства: $x_1+x_2=-2$, $x_1x_2=-1$. Из второго равенства получаем, что корни уравнения имеют противоположные знаки. С учетом этого из первого равенства получаем: наибольший по модулю корень имеет отрицательный знак.

Пример 4. Найти сумму квадратов корней уравнения $x^2+2x-1=0$.

Первый вариант решения. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения. По теореме Виета $x_1+x_2=-2$, $x_1x_2=-1$.

Так как $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, то $x_1^2+x_2^2=(-2)^2-2(-1)=4+2=6$.

Второй вариант. Так как x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+2x-1=0$, то выполняются равенства: $x_1^2+2x_1-1=0$ и $x_2^2+2x_2-1=0$.

Сложив эти равенства, получаем:

$$x_1^2+2x_1-1+x_2^2+2x_2-1=0.$$

Откуда

$$x_1^2+x_2^2=-2(x_1+x_2)+2.$$

По теореме Виета $x_1+x_2=-2$, поэтому

$$x_1^2+x_2^2=-2(-2)+2=6.$$

Предлагаем сравнить два различных варианта выполнения задания.

Пример 5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x+y=3, \\ 2xy=2 \end{cases}$

Разумеется легко исполнить известны алгоритм решения этой системы – метод подстановки.

Но если внимательно изучить уравнения системы, то, на основе обратной теоремы Виета, можно утверждать, что 2x и y – корни квадратного уравнения $t^2-3t+2=0$. Корни этого уравнения 1 и 2. Значит, для определения решений системы уравнений получаем две такие системы: $\begin{cases} 2x=1 \\ y=2 \end{cases}$ *или* $\begin{cases} 2x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

Ответ: (0, 5; 2) и (1; 1).

Несколько слов о возможных исследовательских заданиях.

Задания для тех, кто интересуется компьютерами

Предлагаются такие известные задания:

– составление обучающих программ;

– генерирование заданий с помощью компьютера по заказу учителя;

– подготовка программ для проведения тестирования;

- выполнение заказов учителя по подбору электронных ресурсов из доступных источников и др.

Дополнительные указания по данным исследованиям на сайте или при личных консультациях.

Для учеников, чьи **интересы связаны с педагогикой или психологией,** могут быть предложены такие задания:

– затруднения школьников при изучении теории;

– подготовка обучающих программ;

– педагогических средств для проведения контроля по теоретическим вопросам темы;

– подготовка своего варианта электронного учебника по теме;

– анализ опыта изучения темы и подготовка материалов о опыте учителя на сайт школы или учителя;

– педагогический анализ изложения темы в разных (не только современных) учебниках.

Тем же **ребятам, которые интересуются гуманитарными науками,** предлагаются темы:

– изучение запросов школьников к учебнику по математике и подготовка своего варианта учебника (в соответствии с результатами изучение запросов);

– подготовка учебника на иностранном языке;

– анализ изложения темы в разных зарубежных учебниках;

– подготовка материалов с уроков изучения теории на иностранном языке на сайт школы или учителя (при этом важно разобраться с тем, что такое стиль учителя и как при переводе обеспечить его сохранение).

Для учеников, которые интересуются прикладной математикой, можно предложить исследование «Оценка сложности решения задач на применение теоремы Виета».

Ученикам, **которые интересуются экономикой,** можно провести маркетинговое исследование о целесообразности проведения исследований, приведенных выше. При этом маркетинговые исследования могут проводиться для разных уровней (школы, района, области и др.).

Для учеников, **которые не определились со своими приоритетами,** можно предложить:

- тему, связанную с жизнью Виета. Ученикам предстоит найти в сети Интернет материалы о жизни Виета и подготовить сообщение для кружка на тему «Виет: жизнь и вклад в развитие алгебры»;
- предложить проект школьного журнала под условным названием «Математика».

Поговорим о систематизации знаний

«Систематизация знаний – это деятельность, направленная на выделение и изучение структурных элементов системы знаний, а также на выделение и изучение связей между ними». Авторы обосновали такой план осуществления систематизации знаний:

1. Формулировка цели систематизации.
2. Ограничения материала, подлежащего систематизации.
3. Выбор способа наглядного представления систематизированного в соответствии с поставленной целью материала.
4. Выделение в отобранном материале основных структурных элементов системы знаний.
5. Выделение и рассмотрение основных признаков каждого элемента.
6. Выделение связей между элементами системы знаний.
7. Оформление результатов, их наглядное представление (2, с. 109).

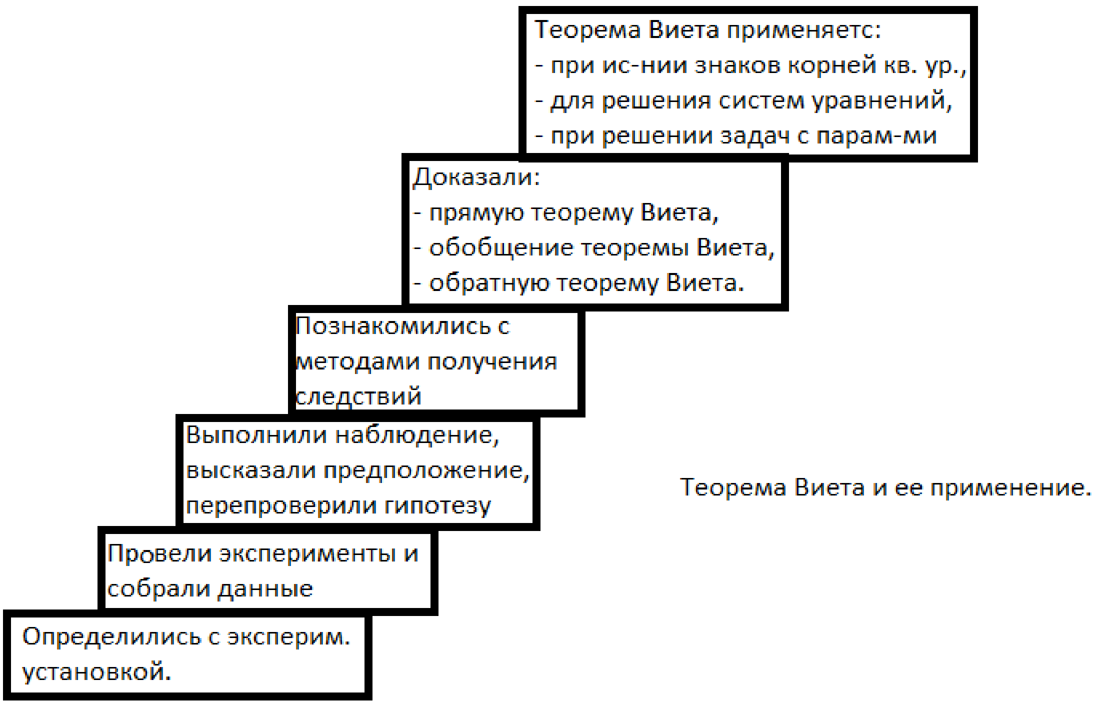
Приведем материалы (фрагменты) систематизаций знаний, взятых из личных справочников двух учеников автора.

Первый для систематизации знаний по теме «Теорема Виета и ее применение для решения задач» применил таблицу.

N/N	Название этапа изучения	Реализация	Возможные применения
1	Открытие	Использовали таблицу как	Можно применять

	теоремы Виета	экспериментальную установку. Собрали и изучили данные. Высказали предположение о связях между коэффициентами и корнями. Перепроверили. Уточнили гипотезу	при доказательстве других утверждений и решении задач. Применять аналогичные действия при изучении других предметов: физика, химия и др.
2	Доказательство теоремы Виета	Изучили методы получения следствий (применение определений, известных теорем, выполнение возможных действий). Доказали, получая следствия. В учебнике **другое решение** – применили формулы корней квадратного уравнения.	Методы получения следствий могут быть применены не только при изучении математики.

Второй выбрал вариант в виде схемы, отражающей последовательность совместных действий на уроке.



Вопросы к зачету:

1. Теорема Виета и ее доказательство.
2. Обратная теорема Виета и ее доказательство.
3. Обобщение теоремы Виета на многочлен третьей степени. Доказательства только по желанию ученика.
4. Обобщение теоремы Виета на многочлен четвертой степени. Доказательства только по желанию ученика.
5. Обобщение теоремы Виета на многочлен n-степени.
6. Применения теоремы Виета для решения задач.
7. Условие задачи, при решении которой используется теорема Виета.

Литература

1. Фундаментальное ядро содержание общего образования / под ред. В.В. Козлова А.М. Кондакова: 4-е изд.: дораб. – М.: Просвещение, 2011.

2. Н.И. Зильберберг. Урок математики: подготовка и проведение: Кн. для учителя – М.: Просвещение, 1995.

3. Н.Я. Виленкин и др. Алгебра. Учебное пособие для IX и X классов средних школ с математической специализацией. – М.: Просвещение, 1968.

4. Усова А.В., Беликов В.А. Учись самостоятельно учиться. Учебное пособие для учащихся школы. – Челябинск – Магнитогорск. Издательство ЧГПИ «Факел», 1997.

5. Н. И. Зильберберг Алгебра – 8. Для углубленного изучения математики. Псков, 1996 г.