Второй вариант сдвоенного урока
Тема: Сумма углов треугольника

Класс разделен на группы учащихся.

Первый этап урока
(обеспечение положительной мотивации)

Я знаю, что семиклассники, как все дети, любят, часто чрезмерно, играть. Нам игра поможет осознать геометрическую проблему, которую нам на уроке и придется решать.

Предлагаю первую игру: Кто быстрее построит треугольник, один угол которого равен 45^0.

Ученик, который выполнил верно задание первым, называется победителем первой игры и получает приз (какая-то книжечка по математике).

Вторая игра: Кто быстрее построит треугольник, один из углов которого 45^0 , а второй – 57^0.

Вновь определяется победитель и ему вручается приз.

Третья игра: Кто быстрее построит треугольник, в котором один угол 45^0, второй – 56^0 и третий – 90^0.

Учитель надеялся, что ученики осознают, что построить треугольник не удается, возникнет проблемная ситуация и гипотеза, что такого не может быть. Потом, разными методами будет открыта теорема и ее доказательство.

Учитель: ни одной из групп не удалось выполнить задание… Случайно это? Обсудите в группах ситуацию и выскажите мнение группы.

Практически всегда (возможно с помощью учителя отдельным группам) группы формулируют утверждение: **такой треугольник построить нельзя.**

Тогда возникает вопрос: в каком случае удается построить треугольник по трем углам?

Второй этап урока
(открываем основную теорему)

Группам предлагаются задания.

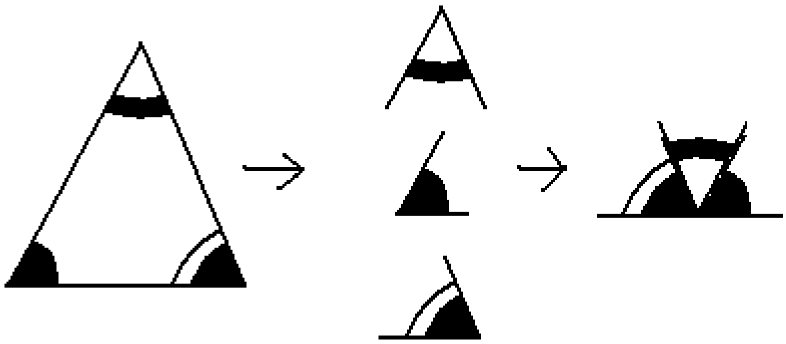
Задание первой группе

Материал для группы школьников, которое позволит высказать предположение о сумме углов треугольника путем применения бумаги и непосредственного суммирования углов треугольника.

Исполните такой алгоритм:

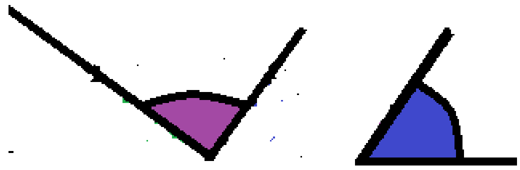
1. **Сделайте чертеж любого треугольника.**
2. **Оторвите углы треугольника.**
3. **Сложите угол, равный сумме углов треугольника.**
4. **Какую сумму углов получили. Докажите свое предположение.**
5. **Повторите эксперимент.**
6. **Выберите того, кто будет рассказывать о Вашем эксперименте (используйте для этого лист ватмана и фломастеры).**

Это словесное описания алгоритма дополнялось таким рисунком:

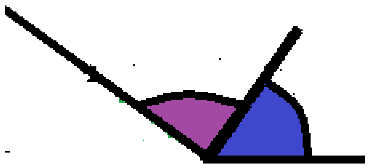


Материал для 2-ой группы
(группа тех учеников, которые увлечены математикой)

Изучили правило сложения углов. Пусть даны два угла.

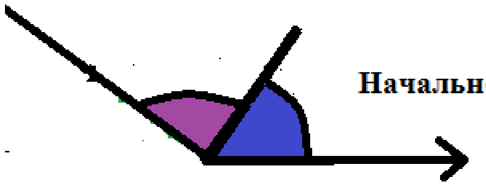


Для сложения совмести углы так, чтобы совпали вершины и одна сторона (см. рисунок)

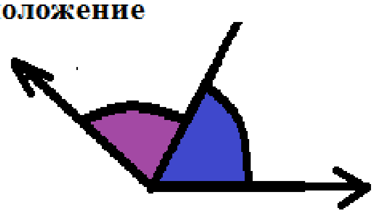


Покажем, каким образом можно находить сумму углов путем поворота лучей.

Зафиксируем начальное положение луча:



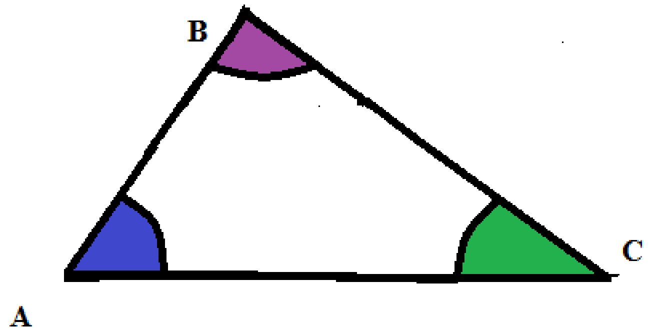
Теперь выполняем поворот против часовой стрелки на первый угол и потом выполняем поворот, также против часовой стрелки, на второй угол, получая конечное положение луча:



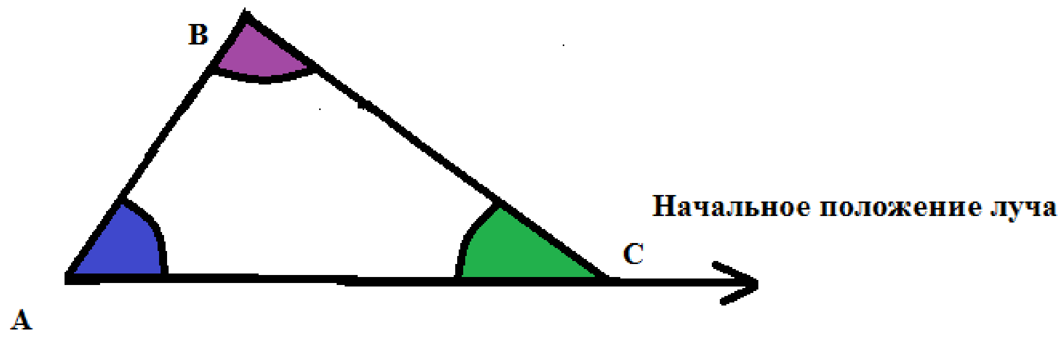
Угол между начальным и конечным положениями и дает сумму углов.

Применим такой сложение углов для определения суммы углов треугольника.

Рассмотрим произвольный треугольник:

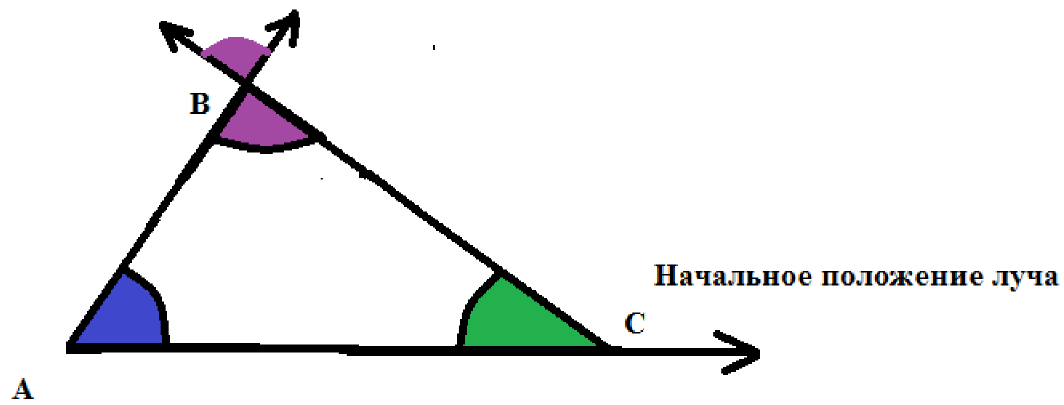


Зафиксируем начальное положение луча:

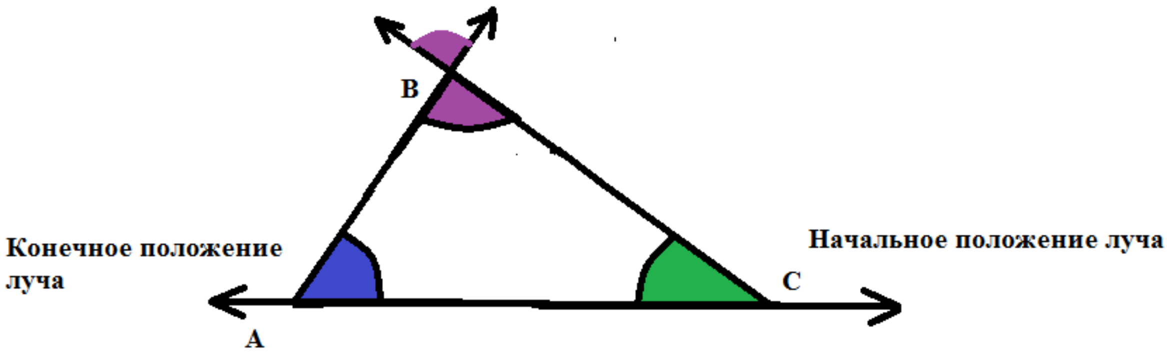


Теперь поворачиваем луч АС на угол А вокруг точки А против часовой стрелки, переводя луч в новое положение луча АВ.

Теперь луч АВ поворачиваем вокруг точки В на угол В против часовой стрелки. Получаем сумму двух углов треугольника.



Теперь поворачиваем против часовой стрелки на угол С вокруг точки С, получая конечное положение луча.



Угол между начальным и конечным положениями и будет равен сумме углов треугольника. Изучите последний рисунок и выскажите прогноз о сумме углов треугольника.

Можно ли считать, что получено доказательство утверждения о сумме углов треугольника? Изменился ли ответ, если проделали такие действия с ста другими треугольниками и каждый раз получали бы один и тот же вопрос.

Материалы для третьей группы

Каждый участник чертит в тетради треугольник. Потом измеряет три угла «своего» треугольника и находит сумму мер всех углов.

На следующем шаге предлагается:

- сравнить результаты измерений,

- высказать прогноз о сумме углов треугольника.

Группы в случайном порядке или по выбору выбирают вариант задания и выполняют его.

После выполнения заданий группы по очереди рассказывают действия, которые выполнили и предположение, к которому пришли.

Таким образом, сформулировано такое предположение: **Сумма углов треугольника равна 180^0.**

Особой удачей на уроке будет ситуация, когда группа, измерявшая углы треугольника не согласится с другими группами на основе своих измерений.

Важно дать возможность другим группам высказать свое мнение. Часто проверка измерений другими группами легко обнаруживает ошибку при «значительных» ошибках. Но важно, чтобы школьники:

- измерения не всегда позволяют высказать прогноз,
- необходимо доказывать любое предположение или опровергать его.

Третий этап урока
(правила геометрии и конкурс
по определению нужной информации)

По правилам геометрии для доказательства новых утверждений можно применять только:

- определения понятий, которые были введены ранее,
- утверждения, которые были приняты или доказаны ранее.

Предлагаем провести конкурс по формулировке утверждений, которые были изучены в геометрии на предыдущих уроках. Группы по очереди просят слова и формулирует определение геометрического объекта или утверждения. Если формулировка признается правильной всеми группами, то группе засчитывается очко. Победителем будет признана та группа, которая получит наибольшее число очков. При этом информацию школьники могут брать из доступных источников: учебник, тетрадь, справочники учеников. При этом желательно указывать источник (в том случае, если назывался учебник, то указывались страницы).

Группы называют сведения, которые учитель записывает на доске. Приведем возможные сведения:

1. Первый признак равенства треугольников.
2. Второй признак равенства треугольников.
3. Третий признак равенства треугольников.
4. Определение вертикальных углов.
5. Свойство вертикальных углов.
6. Смежные углы.
7. Свойства смежных углов.
8. Свойства внутренних односторонних углов при параллельных и секущей.
9. Свойства внутренних накрест лежащих углов при параллельных и секущей.
10. Свойства серединного перпендикуляра.

Подводится результат конкурса и переходим к следующему этапу урока.

Четвертый этап урока
(учимся наблюдать и использовать базы)

Мы с Вами создали информационную базу для поиска доказательства.

Сопоставьте формулировку утверждения, которое предстоит доказывать с информационной базой. Предлагаем группам назвать те утверждения, которые по мнению группы «близки» или могут быть применены при доказательстве.

Учитель анализирует предложения групп и оставляет только те утверждения, которые предложили группы.

6. Смежные углы.
7. Свойства смежных углов.
8. Свойства внутренних односторонних углов при параллельных и секущей.
9. Свойства внутренних накрест лежащих углов при параллельных и секущей.

Учитель: таким образом, мы уточнили информационную базу поиска доказательства утверждения.

Теперь я хочу рассказать о еще одной базе, которую (сознательно или бессознательно) создают люди, которым предстоит решать задачи – технологическая база поиска доказательства: возможные утверждения и действия, которые используются при поиске и реализации доказательства.

Пример: применение признаков равенства треугольников.

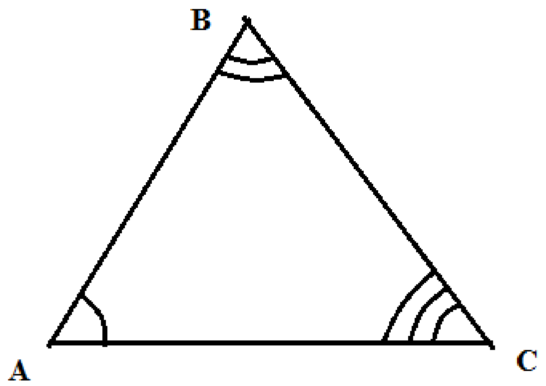
Вот одно из соображений, которое позволяет находить нужное действие и утверждения:

- выбираем одно из утверждений, доказанных ранее,
- вспоминаем те объекты, которые связаны с отобранным утверждением,
- если в новой ситуации удается найти объекты, к которым можно применить утверждение, то применяется и получают новую информацию.

Но часто нужные объекты отсутствуют. Иногда, в таких случаях, приходится отказываться от попыток применить утверждение. Но часто применяется другой вариант действий: выполняются такие действия, чтобы удалось применить утверждение.

Записываем на доске то, что дано и что требуется доказать.
Углы ДАВ и ЕАВ – смежные углы.

Углы ЕАС и ДАС – смежные углы.

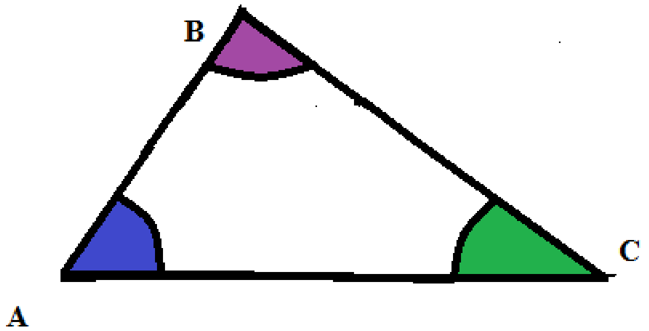


Дано: Δ **ABC,**
$\angle$**A,** $\angle$**B,** $\angle$**C**
Доказать:
$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$.

Обратимся к нашей информационной базе и рассмотрим первые два пункта:

Смежные углы.

Сумма смежных углов равна 180^0.



Кто заметил смежные углы в нашей ситуации?

Естественно, что ученики отмечают отсутствие смежных углов. Вот мы и попали в ситуацию, когда ориентированы на применение утверждения, но нужных объектов нет. В некоторых случаях принимается решение об отказе от попыток применить. Но имеется и иной вариант действий – выполнить какие-то действия, в результате выполнения которых появятся нужные объекты.

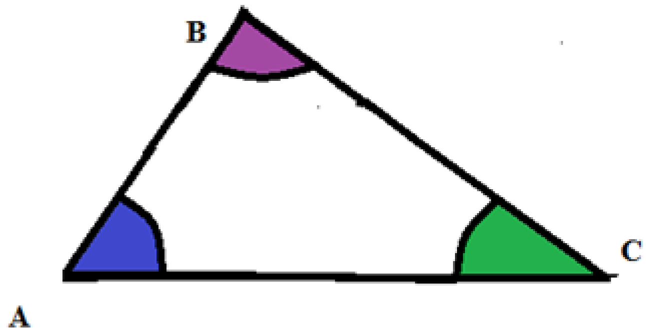
Здесь важны такие соображения:

- если у Вас имеется несколько возможностей и Вы не испробовали все, то не следует упираться в одну возможность. Лучше попробовать все возможные варианты и потом упираться в одну из возможностей, которая кажется Вам перспективной,

- следует «держать» в уме результаты неудачных попыток: их результаты могут быть использованы в дальнейшем.

После обсуждений группы предлагают продлить одну из сторон треугольника, что приводит к появлению смежных углов и позволяет получить два угла, сумма которых равна 180^0. Но достаточно быстро группы приходят к мнению, что следует обратиться к попытке применить другое утверждение из информационной базы.

Свойство внутренних односторонних углов при параллельных и секущей.



Вновь отмечаем:

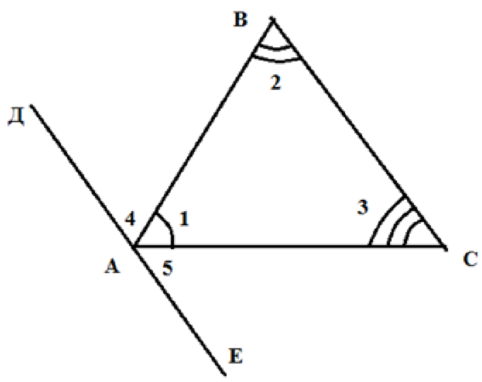
- параллельные прямые отсутствуют,

- следует провести прямую, параллельную стороне треугольника и проходящую через вершину треугольника.

Разные группы назовут разные вершины.

Здесь требуется выбрать один из вариантов. Учитель может познакомить с важным правилом: если имеются разные варианты и нет предпочтения одному варианту, то следует взять любой из возможных вариантов.

Пусть принято решение: провести через вершину А прямую, параллельную ВС.



Пятый этап урока
(учимся наблюдать и фиксировать результаты наблюдений)

Здесь учитель рассказывает ученикам о том, что такое наблюдение и предлагает изучить чертеж и указать объекты, которые они видят.

Ученики называют:

Угол ДАВ. Вводится обозначение 4.

Угол ЕАС. Вводится обозначение 5.

Параллельные ДЕ и ВС и секущая АВ.

Параллельные ДЕ и ВС и секущая АС.

Учитель предлагает заметить и называть какие-то связанные пары углов.

Ученики называют:

Углы 2 и 4 – внутренние накрест лежащие при параллельных ДЕ и ВС и секущей АВ.

Углы 3 и 5 – внутренние накрест лежащие при параллельных ДЕ и ВС и секущей АС.

Углы ДАВ и ЕАВ – смежные углы.

Углы ЕАС и ДАС – смежные углы.

Назвали углы по одному, по два. А нет ли три угла, которые что образуют известное?

Теперь ученики называют:

Углы 4, 1 и 5 образуют развернутый угол.

Шестой этап
(учимся получать следствия путем применения утверждений)

Учитель рассказывает о получении следствий путем применения известных утверждений. Далее приводит результаты наблюдений и предлагает получить следствия путем применения известных утверждений. Для этого кто-то из учеников называет утверждение из базы и если может, то формулирует следствие, которое записывается на доске.

Учитель предлагает заметить и называть какие-то связанные пары углов.

Ученики называют:

Углы 2 и 4 – внутренние накрест лежащие при параллельных ДЕ и ВС и секущей АВ.

Следствие: **углы 2 и 4 равны (по свойству накрест лежащих углов при параллельных и секущей).**

Углы 3 и 5 – внутренние накрест лежащие при параллельных ДЕ и ВС и секущей АС.

Следствие: **углы 3 и 5 равны (по свойству накрест лежащих углов при параллельных и секущей)**.

Учитель предлагает ученикам назвать следствия из следующих двух результатов наблюдения:

Углы ДАВ и ЕАВ – смежные углы.

Углы ЕАС и ДАС – смежные углы.

Теперь следствие для трех углов:

Углы 4, 1 и 5 образуют развернутый угол.

Следствие: **Сумма углов 4, 1 и 5 равна 180^0**.

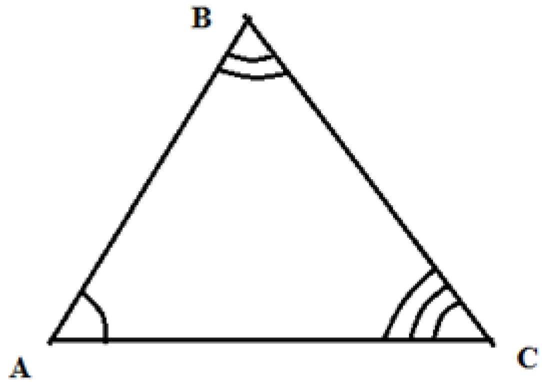
Мы с Вами, используя элемент технологической базы – приемы, которые используются для изменения ситуации и создания условий для применения утверждений, получили ряд следствий. Но пока не доказано исходное утверждение.

Переходим к завершению доказательства утверждения о сумме углов треугольника.

Седьмой этап
(доказываем основное утверждение)

На доске воспроизводится чертеж и запись утверждения, которое следует доказать.

Дано: Δ ABC,
$\angle$A, $\angle$B, $\angle$C
Доказать: $\angle$A+$\angle$B+$\angle$C=180^0.



Дано: Δ ABC,
$\angle$A, $\angle$B, $\angle$C
Доказать: $\angle$A+$\angle$B+$\angle$C=180^0.
Как получить результат?
Рекомендация учителя: вспомнить методы доказательства равенств.

Если ученики не вспомнят методы или они их не выделяли, то учитель рассказывает о методе сведения:

- выбрать одну из частей равенства (обычно эта «большая» часть),
- выполнять последовательно такие действия, чтобы получить вторую часть равенства.

Используя эту эвристику и результаты следствий ученики завершают доказательства в группах. Одна из групп рассказывает свой вариант доказательства.

Учитель, обращаясь к группам, давайте осознаем, что и как было сделано. Группы, после обсуждений, называют:

- сформулировано предположение о сумме углов треугольника,
- создана информационная база для поиска метода доказательства,

- познакомились с одним элементом технологической базы поиска метода доказательства и методом доказательства равенств,

- познакомились с тем, что такое наблюдение, получили и зафиксировали результаты наблюдений,

- узнали метод получения следствий путем применения известных утверждений,

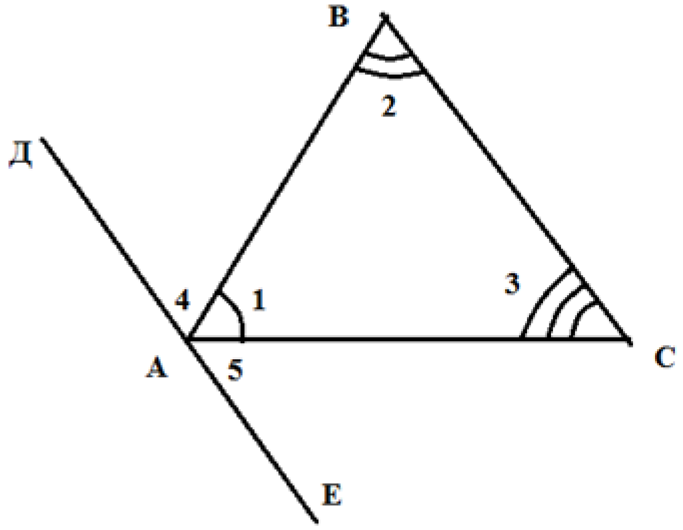
- получили следствия,

- завершили доказательство утверждения.

Учитель: Вы верно указали, что сделали, но не указали то, что не сделали. Что не сделано нами?

Ученики подводятся к тому, что следует оформить доказательство утверждения.

Восьмой этап
(оформляем доказательство)



Дано: Δ АВС, $\angle$А, $\angle$В, $\angle$С
Доказать: $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$.
Для оформления доказательства рекомендую, особенно на первых этапах применять специальную таблицу (фрагмент).

	Утверждение или действие	**Обоснование**
1.	**Углы 2 и 4 внутренние накрест лежащие углы при параллельных ДЕ и ВС и секущей АВ**	**По определению внутренних накрест лежащих углов**
2.	**Углы 2 и 4 равны**	**По свойству внутренних накрест лежащих углов при параллельных и секущей**

Учитель:

Чем будет дальше заниматься физик (или представитель другой специальности)?

Чем будет заниматься математик?

Здесь учитель рассказывает о деятельности математика. После этого на следующем этапе переходят к обобщению теоремы о сумме углов четырехугольника.

Девятый этап урока
(учимся обобщению утверждений)

Обобщение можно выполнить методом замены объектов, которые фигурировали в исходном утверждении. Это можно выполнить по такой схеме:

1. Выделить объекты, которые имеются в ситуации, связанной с исходным утверждением.
2. Определить возможные замены.
3. Выполнить одну из замен и высказать прогноз о результате.
4. Сформулировать утверждение.
5. Доказать или опровергнуть утверждение.

Задание первой группы

Эта группа находила сумму углов треугольника с помощью листа бумаги.

Членам группы предлагается:

- попытаться высказать прогноз о сумме трех внешних углах, взятых по одному у каждой вершины,

- попытаться доказать свой прогноз.

Какую замену объектов применили в данном случае?

Задание второй группы

Эта группа находила сумму углов треугольника с помощью поворотов. Членам группы предлагается:

- попытаться высказать прогноз о сумме трех внешних углах, взятых по одному у каждой вершины,

- попытаться доказать свой прогноз.

Какую замену объектов применили в данном случае?

Задание третьей группы

Членам группы предлагается:

- попытаться высказать прогноз о свойстве внешнего угла треугольника,

- попытаться доказать свой прогноз.

Какую замену объектов применили в данном случае?

Задание четвертой группы

Членам группы предлагается:

- попытаться сформулировать задачу, связанную с углами четырехугольника,

- решить задачу,

- сформулировать новые задачи.

Какую замену применили в данном случае для формулировки новой задачи?

Задание пятой группе

Членам группы предлагается:

- попытаться сформулировать задачу о сумме внешних углов четырехугольника,

- доказать утверждение о сумме внешних углов четырехугольника.

Какую замену использовали в данном случае?

Задание шестой группе

Членам группы предлагается:

- высказать прогноз о сумму двух внешних углов, взятых по одному у противоположных вершинах четырехугольника,
- доказать или опровергнуть свой прогноз

Задание седьмой группе

Докажите или опровергните такой утверждение: существует четырехугольник, сумма углов которого равна 180^0.

Таким образом, после представления групп, доказаны такие утверждения:

Теорема о свойстве внешнего угла треугольника.

Теорема о сумме внешних углов треугольника.

Теорема о сумме углов четырехугольника.

Теорема о сумме внешних углов четырехугольника.

Теорема о сумме внешних углов четырехугольника, взятых по одному у двух противоположных вершин четырехугольника.

Установлен факт: сумма углов четырехугольника с самопересенением меняется от четырехугольника к четырехугольнику.

Десятый этап урока
(учимся находить и исправлять ошибки)

Одиннадцатый этап урока
(приступаем к решению и составлению задач)

Двенадцатый этап урока
(строим «маленькую теорию)

На предыдущем уроке была доказано теорема о сумме углов треугольника. Из нее были доказаны теорема 2 (о свойстве внешнего угла) и теорема 3 (теорема о сумме внешних углов треугольника).

Представим себе, что каким-либо способом удалось доказать вторую (третью) теорему.

Удастся ли, пользуясь теоремой 2 (3) доказать первую и вторую (первую и третью) теоремы?

Группам предлагается сформулировать задачу построения «маленькой» теории для четырехугольника.

Вопросы к зачету по теме «Сумма углов треугольника»

1. Методы открытия меры углов (Знать хотя бы один метод. Уметь его рассказать и привести пример использования).
2. Теорема о сумме углов треугольника. Рекомендуется: знать формулировку теоремы, уметь ее рассказать, оформить письменно запись доказательства. Предложить возможное применение теоремы.
3. Теорема о внешнем угле треугольника. Рекомендуется: знать формулировку теоремы, уметь ее рассказать, оформить письменно запись доказательства. Предложить возможное применение теоремы.
4. Теорема о сумме внешних углов треугольника. Рекомендуется: знать формулировку теоремы, уметь ее рассказать, оформить

письменно запись доказательства. Предложить возможное применение теоремы.

Дополнительные вопросы

(для тех, кто хочет знать больше)

1. Теорема о сумме углов четырехугольника.
2. Теорема о внешних углах четырехугольника.
3. Теорема о сумме внешних углов четырехугольника.
4. «Маленькая теория» для треугольника.
5. «Маленькая теория» для четырехугольника.

Идея для тех, кто интересуется математикой
(готовим материалы для портфолио)

Для подготовки материалов для портфолио рекомендуется предложить алгоритмы вычисления градусных мер таких углов, связанных с окружностью:

- вершина угла лежит вне окружности, а обе стороны являются секущими окружности,

- вершина угла лежит вне окружности, а одна сторона является касательной к окружности, а вторая – секущая,

- вершина угла лежит вне окружности, а стороны угла касаются окружности.

Внести в портфолио можно:

- формулировки утверждения и их доказательство,

- задачи, при решении которых используются утверждения, доказанные Вами.

Успехов в изучении геометрии.

Идея для тех, кто интересуется компьютерами
(готовим материалы для портфолио)

Для подготовки материалов для портфолио рекомендуется предложить алгоритмы вычисления градусных мер таких углов, связанных с окружностью:

- вершина угла лежит вне окружности, а обе стороны являются секущими окружности,

- вершина угла лежит вне окружности, а одна сторона является касательной к окружности, а вторая – секущая,

- вершина угла лежит вне окружности, а стороны угла касаются окружности.

После доказательства Вам рекомендуется подготовить электронное пособие «Измерение углов, связанных с окружностью». Описание пособия и работы с ним Вы можете разместить в личном портфолио.

Успехов в изучении применении компьютеров.

Идея для тех, кто интересуется гуманитарными науками
(готовим материалы для портфолио)

Для подготовки материалов для портфолио рекомендуется предложить алгоритмы вычисления градусных мер таких углов, связанных с окружностью:

- вершина угла лежит вне окружности, а обе стороны являются секущими окружности,
- вершина угла лежит вне окружности, а одна сторона является касательной к окружности, а вторая – секущая,
- вершина угла лежит вне окружности, а стороны угла касаются окружности.

В портфолио рекомендуется разместить:

- материалы по истории доказательства алгоритмов измерения углов, связанных с окружностью,
- литературные зарисовки с уроков, на которых изучался материал,
- изучить мнение ребят о уроках и описать,
- описать вариант пособия по геометрии, который предназначен для гуманитариев,
- подготовить на английском языке материал о свойствах углов на сайт школы.

Успехов в учебе.